جامعة البعث | مقرر نظرية الجبور | المدة: ساعتان
كلية العلوم | السنة الرابعة رياضيات (جبر) | الدرجة: ٧٠
قسم الرياضيات | الفصل الأول للعام ٢٠١٧ – ٢٠١٨ | اسم الطالب:

السؤال الأول:

ليكن A جبراً فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. لنفرض أن N جبر جزئي في A. والمطلوب:

١ – أثبت أن كل جبر جزئي في جبر الخارج A/N هو من الشكل K/N حيث K جبر جزئي في A يحوي N.

٢ – لنفرض أن $\Im$ مجموعة الجبور الجزئية في A التي كل منها يحوي N وأن $\overline{\Im}$ مجموعة الجبور الجزئية في جبر الخارج A/N، أثبت أنه يوجد تقابل بين المجموعتين $\Im$ و $\overline{\Im}$.

السؤال الثاني:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. والمطلوب:

١ – عرف المثالي في A ثم أثبت أن كل مثالي في A هو نواة لتشاكل جبور لي غامر.

٢ – أثبت أنه لأجل كل عنصر $a \in A$ فإن العلاقة $d_a : A \to A$ المعرفة على A بالشكل الآتي:
أياً كان $x \in A$ فإن $d_a(x) = [a, x]$ هي تطبيق اشتقاق على A.

٣ – أثبت أن المجموعة $Inn(A) = \{d_a ; \forall a \in A\}$ تشكل مثالياً في جبر لي $Der(A)$.

٤ – ليكن S جبر لي جزئي في A، أثبت أن المجموعة:

$$N(S) = \{a : a \in A ; d_a(S) \subseteq S\}$$

تشكل جبر لي جزئي في A.

السؤال الثالث:

عرف جبر لي عديم القوى ثم أثبت أنه إذا كان A جبر لي فوق الحقل F وكان بعد A فوق F يساوي 2 فإن A ليس عديم القوى.

السؤال الرابع:

ليكن $f : A \to A'$ تشاكل جبور لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R ولنفرض أن I مثالياً في A. إذا كان $I \subseteq Ker(f)$، أثبت أنه يوجد تشاكل جبور لي وحيد $g : A/I \to A'$ يحقق $g\pi = f$، حيث $\pi : A \to A/I$ التشاكل القانوني الغامر.

حمص في ١٥ / ١ / ٢٠١٨ م.

انتهت الأسئلة

د. حمزة حاكمي

سلم تصحيح مقرر نظرية الجبور
الفصل الأول ٢٠١٧ - ٢٠١٨
السنة الرابعة رياضيات
(حل)

السؤال الأول (٢٥ درجة = ١٣ + ١٢)

١- ليكن $\overline{K}$ جبراً جزئياً من $\frac{A}{N}$ ولنأخذ المجموعة $K = \{x : x \in A,\ x + N \in \overline{K}\}$

إن K مجموعة جزئية من A غير خالية لأن $0 \in A$ وأن $N = 0 + N \in \overline{K}$.

١٣ ليكن $x, y \in K$ و $\alpha, \beta \in R$ عندئذ $x+N, y+N \in \frac{A}{N}$ وبالتالي فإن $\alpha(x+N), \beta(y+N) \in \frac{A}{N}$

$(\alpha x + \beta y) + N = (\alpha x + N) + (\beta y + N) = \alpha(x+N) + \beta(y+N) \in \overline{K}$ ؛ (٥)

وبما أن $x, y \in A$ فإن $\alpha x + \beta y \in A$ وبالتالي $\alpha x + \beta y \in K$.

من جهة أخرى،
وبما أن $x, y \in A$ نجد أن $x \cdot y \in K$، مما سبق نجد أن $(x \cdot y + N) = (x+N)\cdot(y+N) \in \overline{N}$ و K جبر جزئي من A.

وإن $N \subseteq K$ لأنه أياً كان $a \in N$ فإن $a + N = N \in \overline{K}$ ومنه $a \in K$

وإن K مثالي من N لأن K مودول جزئي في N وأياً كان $x \in K$ و $b \in N$ فإن $x \in A$ ومنه $xb, bx \in N$، وهكذا نجد أن $\frac{K}{N}$ جبراً

فوق الحلقة R، لنبرهن على أن $\overline{K} = \frac{K}{N}$.

ليكن $\overline{x} \in \overline{K}$ عندئذ فإن $\overline{x} \in \frac{A}{N}$ ومنه $\overline{x} = a + N$ حيث $a \in A$. علماً أن

$\overline{x} \in \overline{K}$ فإن $a \in K$ وهكذا فإن $\overline{x} = a + N \in \frac{K}{N}$ أي أن $\overline{K} \subseteq \frac{K}{N}$.

ليكن $y + N \in \frac{K}{N}$ عندئذ فإن $y \in K$ ومنه $y + N \in \overline{K}$ وهذا يعني أن

$\frac{K}{N} \subseteq \overline{K}$ مما سبق نجد أن $\overline{K} = \frac{K}{N}$.

٢- لنفترض أن Σ مجموعة الجبور الجزئية من A التي كل منها يحوي N وأن $\overline{\Sigma}$ مجموعة الجبور الجزئية من جبر الخارج A/N. لنعرف العلاقة $f : \Sigma \to \overline{\Sigma}$ بالشكل الآتي

١٢ أياً كان $K \in \Sigma$ فإن $f(K) = \overline{K} = \frac{K}{N}$. ليكن $K, K' \ni \Sigma$ بحيث $K = K'$ عندئذ

درجة $\frac{K}{N} = \frac{K'}{N}$ ومنه $f(K) = f(K')$، لنفترض أن $f(K) = f(K')$ عندئذ فإن

$\frac{K}{N} = \frac{K'}{N}$. ليكن $x \in K$ عندئذ $\overline{x} = x + N \in K/N = \frac{K'}{N}$ ومنه

يوجد $y \in K'$ بحيث $\overline{x} = x + N = y + N$ وبالتالي فإن $x - y \in N$ وبالتالي يوجد

$b \in N$ بحيث $x = y + b$ وبما أن $N \subseteq K'$ نجد أن $x = y + b \in K' + N \subseteq K'$

ومنه فإن $K \subseteq K'$ بالمثل نجد أن $K' \subseteq K$ ومنه $K = K'$ أي أن f متباين،

ليكن $\overline{D} \in \overline{\Sigma}$ عندئذ حسب (أ) فإن $\overline{D} = D/N$ حيث $D \in \Sigma$ وأن $f(D) = \overline{D}$.

السؤال الثاني (٤٣ = ١٣ + ١٥ + ٥ + ١٠)

١- نقول عن المجموعة B أنها مثالي في A إذا كانت B مودول جزئي في A ويحقق أياً كان $a \in A$ و $b \in B$ فإن $a \cdot b, b \cdot a \in B$،

ليكن B مثالياً في A. لنعرف العلاقة $f : A \to A/B$ بالشكل الآتي: أياً كان

$a \in A$ فإن $f(a) = a + B$ إن f تطبيق لأنه إذا كان $a, b \in A$ بحيث $a = b$ فإن

$f(a) = a + B = b + B = f(b)$ وأن f تشاكل جبور حيث

١٠ درجات
$f(a+b) = (a+b) + B = (a+B) + (b+B) = f(a) + f(b)$

$f(a \cdot b) = a \cdot b + B = (a+B) \cdot (b+B) = f(a) \cdot f(b)$

$f(\lambda a) = \lambda a + B = \lambda(a+B) = \lambda f(a) \quad \forall \lambda \in R.$

لنبرهن على أن $\ker f = B$. ليكن $a \in \ker(f)$ عندئذ $f(a) = B$ وأن

$f(a) = a + B$ ومنه $a + B = B$ أي أن $a \in B$ ومنه $\ker(f) \subseteq B$،

ليكن $b \in B$ عندئذ $f(b) = b + B = B$ ومنه $b \in \ker(f)$ وبالتالي

$B \subseteq \ker(f)$ وهكذا فإن $B = \ker(f)$.

ليكن $x,y\in A$ حيث $x=y$ عندئذ

$$d_a(x)=[a,x]=[a,y]=d_a(y)$$

أي أن d_a تطبيق وهو تشاكل مودولي خطي لأن

$$d_a(x+y)=[a,x+y]=[a,x]+[a,y]=d_a(x)+d_a(y)$$

$$d_a(\lambda x)=[a,\lambda x]=\lambda[a,x]=\lambda d_a(x)$$

$$d_a[x,y]=[a,[x,y]]=[x,[a,y]]+[[a,x],y]$$

$$=[x,d_a(y)]+[d_a(x),y]$$

وهذا يعني أن d_a تطبيق اشتقاق.

٣- إن $Inn(A)$ جبر جزئي من $Der(A)$ وغير خالٍ لأن $0\in A$ وإن $d_0=0\in Inn(A)$. ليكن $d_a,d_b\in Inn(A)$ حيث $a,b\in A$، عندئذ أيا كان $x\in A$ فإن

$$(d_a-d_b)(x)=d_a(x)-d_b(x)=[a,x]-[b,x]=$$

$$=[a-b,x]=d_{a-b}(x)$$

وبما أن $a-b\in A$ نجد أن $d_a-d_b=d_{a-b}\in Inn(A)$.

وأيا كان $\lambda\in R$ فإن

$$(\lambda d_a)(x)=\lambda d_a(x)=\lambda[a,x]=[a,\lambda x]=\sout{d_a(\lambda x)}$$

$$=[\lambda a,x]=d_{\lambda a}(x)\quad \forall x\in A$$

وبما أن $\lambda a\in A$ فإن $\lambda d_a=d_{\lambda a}\in Inn(A)$

مما سبق نجد أن $Inn(A)$ مودول جزئي من $Der(A)$.

ليكن $D\in Der(A)$ و $d_a\in Inn(A)$ حيث $a\in A$. لنثبت أن $[D,d_a]\in Inn(A)$

أيا كان $x\in A$ فإن

$$[D,d_a](x)=(Dd_a-d_aD)(x)=Dd_a(x)-d_aD(x)$$

$$=D[a,x]-d_a(D(x))=[D(a),x]+[a,D(x)]-$$

$$-[a,D(x)]=[D(a),x]=d_{D(a)}(x)$$

وبما أن $D(a)\in A$ نجد أن $[D,d_a]=d_{D(a)}\in Inn(A)$.

مما سبق نجد أن $Inn(A)$ مثالي في $Der(A)$.

٤- لنلاحظ من التعريف أن $N(S)\subseteq A$ وأن $N(S)\neq\phi$ لأن $0\in N(S)$ وذلك لأن $0\in A$ وأيا كان $x\in S$ فإن $d_0(x)=[0,x]=0\in S$.

$$[0,x]=[0+0,x]=[0,x]+[0,x]\Rightarrow[0,x]=0$$

ليكن $a,b\in N(S)$ ولنثبت أن $a-b\in N(S)$. بما أن $a,b\in N(S)$ نجد أن $a,b\in A$ وأن $a-b\in A$ وأيا كان $x\in S$ فإن

$$d_{a-b}(x)=[a-b,x]=[a,x]-[b,x]=d_a(x)-d_b(x)\in S$$

وهذا يعني أن $a-b\in N(S)$. ليكن $\alpha\in R$ وإن $a\in N(S)$ عندئذ $\alpha a\in A$ وأيا كان $x\in S$ فإن

$$d_{\alpha a}(x)=[\alpha a,x]=\alpha[a,x]=\alpha d_a(x)\in S$$

ليكن $a,b\in N(S)$ عندئذ $a,b\in A$ وإن $[a,b]\in A$ وهذا أيا كان $x\in A$ فإن

$$d_{[a,b]}(x)=[[a,b],x]=-[x,[a,b]]$$

وبما أن

$$[x,[a,b]]+[a,[b,x]]+[b,[x,a]]=0$$

نجد أن

$$d_{[a,b]}(x)=-[x,[a,b]]=[a,[b,x]]$$

$$+[b,[x,a]]=$$

$$=[a,d_b(x)]-[b,[a,x]]=[a,d_b(x)]-[b,d_a(x)]$$

$$=d_a(d_b(x))-d_bd_a(x)\in S$$

مما سبق نجد أن $N(S)$ جبر جزئي من A.

السؤال الثالث (٧ درجات)

نفرض أن $\{e_1, e_2\}$ قاعدة للجبر A فوق F. نميز الحالات الثلاثة الآتية

1- $[e_1, e_2] = \lambda e_1$ حيث $\lambda \in F$، ليكن $z \in C^2A$ عندئذ $z \in [A, A]$ ومنه $z = [x, y]$ حيث $x, y \in A$ ومنه $x = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2, \; y = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2$

$$z = [x, y] = \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \beta_1 \alpha_2 [e_2, e_1]$$
$$= (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)[e_1, e_2] = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)\lambda e_1 ,$$

وهذا يعني أن $z = \gamma e_1$ حيث $\gamma \in K$، بما يعني أن $C^2A = \{\mu e_1 : \mu \in K\} \neq 0$ أي أن C^2A جبر جزئي من A بعده ١، لنفرض أن $z \in C^3A = [A, C^2A]$ عندئذ يوجد $a \in A$ و $b \in C^2A$ حيث $z = [a, b]$ وأن $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ و $b = \theta e_1$ ومنه فإن

$$z = [a, b] = [\alpha e_1 + \beta e_2, \theta e_1] = \beta\theta[e_2, e_1] = -\beta\theta[e_1, e_2] = -\theta\lambda\beta e_1$$

وهذا يعني أن $C^3A = \{\lambda e_1 : \lambda \in K\} \neq 0$ أي أن C^3A جبر جزئي من A بعده ١، وهكذا نجد أنه أيا كان $k \in N$ وأن $k \geq 2$ فإن C^kA جبر جزئي من A بعده ١ وبالتالي $C^kA \neq 0$

2- إذا كان $[e_1, e_2] = \lambda e_2$ بنفس الطريقة نجد أنه أيا كان $k \in N$ وأن $k \geq 2$ فإن C^kA جبر جزئي من A بعده ١ وبالتالي $C^kA \neq 0$.

3- إذا كان $[e_1, e_2] = \lambda e_1 + \mu e_2$ حيث $\lambda, \mu \in K$، وحسب ما سبق نجد أنه من أجل [illegible] يكون DA جبر جزئي من A بعده ١ وبالتالي $DA \neq 0$ ليكن $z \in C^2A$ عندئذ

$$z \in C^2A = [A, CA] = [A, A], \quad z = [x, y] : x \in A, y \in DA$$

ومنه $\alpha, \beta, \lambda \in R$ و $y = \lambda e_1$ و $x = \alpha e_1 + \beta e_2$ وبالتالي

$$z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2, \lambda e_1] = \beta\lambda[e_1, e_2] = \beta\lambda_0\lambda e_1 + \beta\lambda_0\mu e_2$$

وهذا يعني أن $\{e_1, e_2\}$ تولد الفضاء C^2A ولكونها مستقلة خطياً فإن مجموعة $\{e_1, e_2\}$ قاعدة للفضاء C^2A، وهكذا فإن $C^2A = A \neq 0$، كذلك الأمر فإن

$$C^3A = [A, C^2A] = [A, A] = [A, CA] = C^2A = A \neq 0$$

وهكذا نجد أنه أياً كان $k \in N$ فإن $C^kA = A \neq 0$ وبالتالي الجبر A ليس عديم القوى.

السؤال الرابع (١٥ درجة)

لدينا π إسقاط من A على A/I نعرف التطبيق $\theta : A/I \to A'$ بالشكل الآتي: أيا كان $a + I \in A/I$ فإن $\theta(a + I) = f(a)$ نبرهن أن θ تطبيق: لنفرض أن $a + I, b + I \in A/I$ حيث $a + I = b + I$ عندئذ $(a - b) + I = I$ ومنه نجد أن $a - b \in Ker(f)$ وبالتالي فإن $f(a - b) = 0$ ومنه $f(a) = f(b)$ أي أن $\theta(a + I) = \theta(b + I)$ وبالتالي θ تطبيق وأن θ هومومورفيزم لأن

$$\theta((a + I) + (b + I)) = \theta((a + b) + I) = f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$= \theta(a + I) + \theta(b + I)$$

وأيا كان $\alpha \in F$ فإن

$$\theta(\alpha(a + I)) = \theta(\alpha a + I) = f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha\theta(a + I)$$
$$\theta([a + I, b + I]) = \theta([a, b] + I) = f([a, b]) =$$
$$= [f(a), f(b)] = [\theta(a + I), \theta(b + I)]$$

ومنه فإن θ تشاكل جبور لي كما أنه أياً كان $a \in A$ فإن

$$\theta\pi(a) = \theta(\pi(a)) = \theta(a + I) = f(a) \Rightarrow \theta\pi = f$$

سنبرهن على أن θ وحيد، ليكن $\mu : A/I \to A'$ تشاكلاً آخر يحقق $\mu\pi = f$ عندئذ أياً كان $a + I \in A/I$ فإن

$$\mu(a + I) = \mu\pi(a) = f(a) = \theta\pi(a) = \theta(a + I)$$

وهذا يعني أن $\mu = \theta$.
